

1. A szerkezet és jármű dinamikai kölcsönhatása

A rezgés tan egyik klasszikus feladata a gerendatartón egyenletes sebességgel haladó erő okozta dinamikus hatások számítása. Ennek során meghatározhatók a különböző dinamikus hatásábrák és számíthatók a maximális elmozdulások és igénybevételek. Ezek akkor keletkeznek, amikor az erő a tartón tartózkodik. Amint az erő a tartót elhagyja, a rezgések a mindig meglévő szerkezeti csillapítás miatt csökkenni fognak. Ez az oka annak, hogy a rezgés ezen második szakaszával (a szabadrezgéssel) az irodalom kevésbé foglalkozik. Más a helyzet azonban akkor, ha a tartón a már áthaladt erők okozta szabadrezgések és a tartón még tartózkodó erők okozta gerjesztő hatások együttesen megjelennek. A rezgésösszetevők között a szabadrezgésnek megfelelő harmonikus rezgés hullámhossza a rezgésebességétől függ, és különösen fontos annak az esetnek a vizsgálata, amikor az erők állandó távolságra vannak egymástól, mivel ebben az esetben az egyes erők hatása egymást erősítheti. A geometriai elrendezéstől függően meghatározható egy kritikus járműsebesség, amelyhez a legnagyobb dinamikai hatások tartoznak. A valóságban egy tartón nem erők, hanem tömeggel rendelkező szerkezetek (járművek) mozognak. A mozgó tömeg hatással van a dinamikai rendszer jellemzőire is, különösen akkor, ha a mozgó tömeg a szerkezet tömegéhez képest jelentős. Ez a helyzet a vasúti hidak esetén fennáll. Végül a dinamikai hatást befolyásolhatják a járműrendszer dinamikai paraméterei (merevségi és csillapítási jellemzői) is

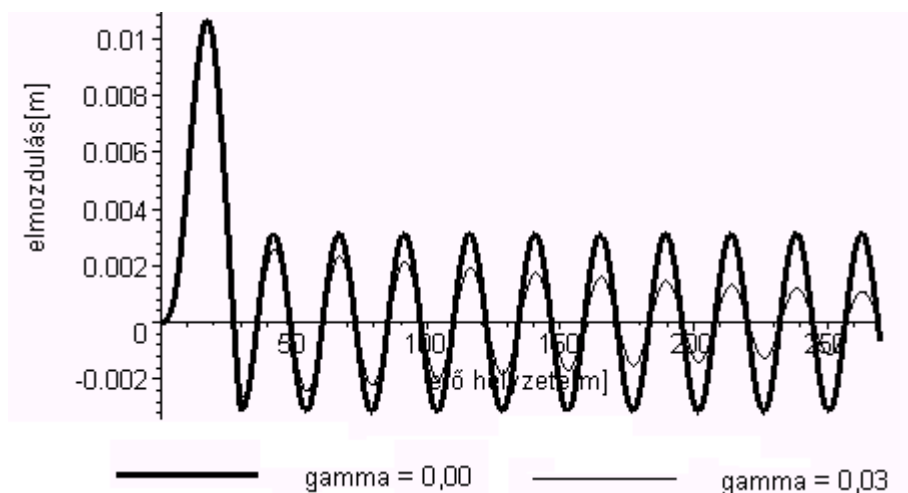
A kutatás során felírtuk a gerenda mozgó erő hatására keletkező hajlító rezgésére vonatkozó differenciálegyenletet a szerkezeti csillapítás figyelembevételével.

$$EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\gamma}{\omega_{0r}} EI \frac{\partial^5 v(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + \mu \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = F \delta(x - vt).$$

Itt $\gamma = \frac{\mathcal{G}}{\pi}$, ahol \mathcal{G} a csillapítás logaritmikus dekrementuma, ω_{0r} a rúd r-edik sajátkörfrekvenciája.

Az inhomogén egyenlet zérus kezdeti feltételek melletti megoldása szolgáltatja az elmozdulásokat arra az esetre, amikor az erő a tartón jár. Ha az erő lement a tartóról, akkor feladat a szabad rezgés vizsgálata az erőnek a tartó elhagyáskor lévő kezdeti elmozdulása és sebessége esetére.

Az 1-es ábrán láthatjuk a tartó középső pontjának dinamikus hatásábráját. Az alkalmazott (a vonatkozó előírásokban megadott) 1,5 %-os csillapításnak a hatása a gerjesztett rezgésnek megfelelő tartófeletti szakaszon nem jelentős, és a hatása az ábrában az adott vonalvastagságok esetén nem is látszik. Ugyanakkor a szabadrezgésnek megfelelő szakaszon, jól látható a szabadrezgés amplitúdójának csökkenése.



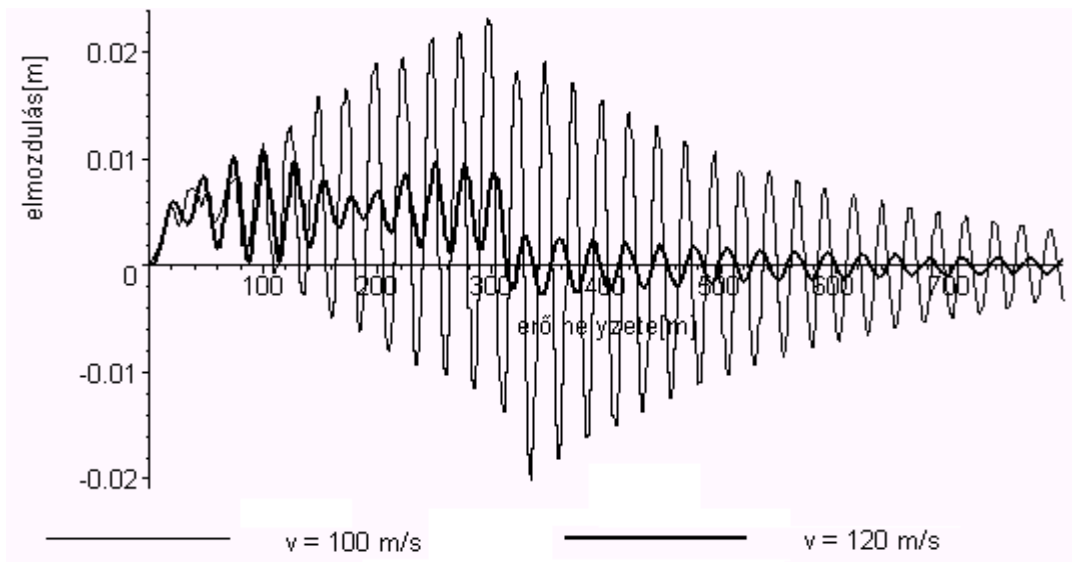
1. ábra. Dinamikus hatására csillapítatlan és csillapított rezgés esetén

A dinamikus hatásábrában a szabadrezgéshez tartozó szakaszon meghatározó szerepe van az első rezgésalaknak. A hatásábrában látható csúcspontok közötti távolság a rezgésidő és a sebesség segítségével számítható. A gyakorlatban az erők közötti távolság adott, így számítható az a sebesség, amelynél az erőknek a hatására csúcspontjaira való egyidejű esése miatt jelentős hatásra számíthatunk. Ezt a sebességet a továbbiakban kritikus erőcsoport sebességnek nevezzük.

$$v_{kr,erő} = \frac{d}{T_{01}} = d \cdot n_{01}.$$

Elvileg az erők akkor is eshetnek egyidejűleg a hatására csúcspontokra, ha a sebesség a kritikus sebesség egészszámmal osztott értékével azonos. A dinamikus hatás kisebb lesz, hiszen az egyes erőcsoportokban lévő - a vonat négy tengelyén átadódó erők - egyidejűleg nem lehet a dinamikai hatására adott maximális ordinátája felett.

A kritikus járműsebesség egy adott érték, amely esetén az ismétlődő terhelés hatására rezonanciaszerű jelenség alakul ki, és ez vezet a jelentős dinamikus terheléshez. Bár általában elmondható, hogy a dinamikus hatás a sebesség növekedésével nő, a szabályos elrendezésű terhelés esetén mégis azt tapasztaljuk, hogy nagyobb sebességhez kisebb dinamikus hatás tartozhat. A 2-es ábrán együtt láthatók a 100 m/s kritikus sebességhez, valamint a 120 m/s sebességhez tartozó elmozdulások.



2. ábra. A tartó középpontjának elmozdulása két különböző sebességeknél

A valóságban egy vasúti hídon a - hídon egyidejűleg tartózkodó - járműrendszer tömege akár 50 % -a is lehet a híd tömegének. A dinamikai rendszerben lévő tömeg jelentős változása megváltoztatja a dinamikai jellemzőket is. A változás ebben az esetben nemcsak mennyiségi, mivel a rendszer tömegmátrixa most időfüggő lesz. A rezgés mátrix-differenciálegyenlete most

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_1(t))\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{r}(t)$$

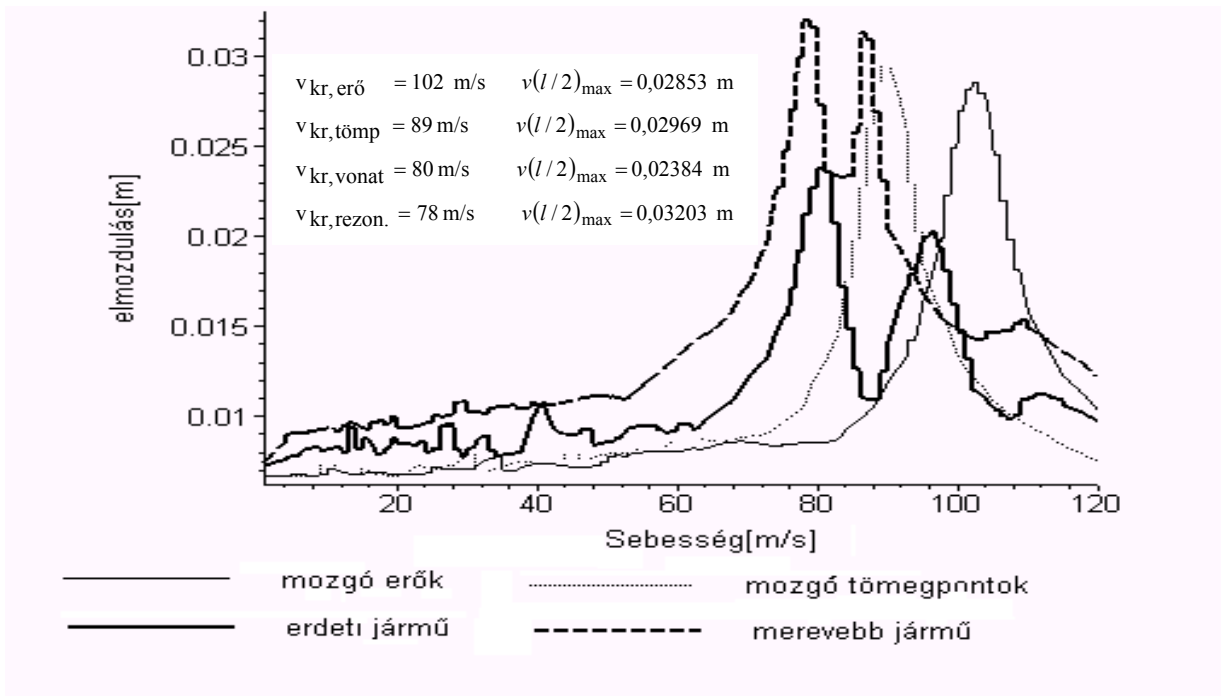
alakú lesz. A jármű maga is egy - rugókkal és csillapító elemekkel rendelkező - dinamikai rendszer, amely a szerkezettel dinamikai kölcsönhatásban van. A vizsgálatok céljára a 12 darab 25m hosszúságú kocsiból álló Shinkansen japán expressz vonatot választottuk. A feladat mátrixegyenletében a mátrixokat időfüggő és időtől független tagok összegeként felírva:

$$(\mathbf{M}_C + \mathbf{M}_t(t))\ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{C}_C + \mathbf{C}_t(t))\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K}_C + \mathbf{K}_t(t))\mathbf{u} = \mathbf{r}_t(t).$$

A feladat megoldásár kidolgozására alkalmazott kvázi modálanalízis lehetővé tette a feladat méreteinek redukálását. A 3-as ábrán láthatjuk a tartó középső pontjának a mozgó erőcsoport, a mozgó tömegpontok, és a mozgó járművek okozta elmozdulását.

Megfigyelhető, hogy a jármű modell esetén a kritikus sebesség két ágban jelent meg, és a maximális elmozduláshoz tartozó kritikus sebesség tovább csökkent. A szerkezet válasza függ a híd és a jármű első frekvenciájának arányától. A legnagyobb dinamikus hatást akkor kapjuk, ha a két frekvencia összeesik.

A fentiekre vonatkozó részletek a Közleményjegyzékben 4,5,7,10,12,15,17-es sorokban megadott cikkekben megtalálhatók.



3. ábra. A tartó középpontjának elmozdulására különböző merevségű járművek esetén

A vizsgálatok eredményei megjelentek az egyetemi oktatásban is, több diplomaterv készült ebben a témakörben, közülük egy a Drezdai műszaki egyetem Tartószerkezetek dinamikája tanszékével közösen.

A bemutatott eljárást kiterjesztettük, ívhidak esetére is, ahol már csak a numerikus eljárás jöhet szóba. Ennek kezdeti eredményeiről 2006 szeptemberében Az IABSE 2006 nemzetközi szimpóziumon számolunk be (Györgyi J., Szabó G.: *Dynamic calculation of train-bridge interaction at arch bridge*)

2. A szerkezet és talajdinamikai kölcsönhatása

Az eltérő csillapítási jellemzőjű elemekből álló szerkezetnél a mátrix-differenciálegyenlet pontos megoldása nehézségekbe ütközik. A probléma meg tovább bonyolódik, ha a rendszerben külső - sebességgel arányos - csillapítás is van. Ebben az esetben feladatunk az

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{q}$$

mátrix-differenciálegyenlet megoldása.

Az inhomogén mátrix-differenciálegyenlet partikuláris megoldása, az ún. állandósult rezgésrész számítása igen egyszerűen kapható, ha a gerjesztő erő harmonikus. Ha harmonikus erő a $\tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{q}e^{i\omega t}$ komplex erő valós vagy képzetes része, a komplex elmozdulás amplitúdója az

$$\mathbf{M}\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{C}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{q}e^{i\omega t}$$

egyenletből

$$\tilde{\mathbf{x}}_g = \left(\tilde{\mathbf{K}} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \right)^{-1} \mathbf{q} = \tilde{\mathbf{H}}(\omega)\mathbf{q}$$

alakban adódik. Attól függően, hogy a gerjesztő erő a komplex erő valós vagy képzetes része volt, az elmozdulások is a komplex elmozdulás valós vagy képzetes részeként adódnak. Ha az erő az idő általános függvénye, akkor a Fourier transzformáció segítségével az időtérben lévő $\mathbf{q}(t)$ függvényt transzformáljuk a frekvencia térben lévő függvénnyé:

$$\tilde{\mathbf{q}}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{q}(t)e^{-i(\Omega t)} dt.$$

A gyakorlati számítások során a diszkrét Fourier transzformációt alkalmazva:

$$\tilde{\mathbf{q}}(\Omega_n) = \Delta t \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{q}(t_m) e^{-i(2\pi m m/N)}.$$

Az adott harmonikus erőkomponenshez tartozó megoldáshoz mindenegyes összetevő esetén meg kellett oldani egy komplex együtthatómátrixú egyenletrendszer. Egy adott időponthoz tartozó teljes komplex megoldás az inverz diszkrét Fourier transzformációt alkalmazva:

$$\tilde{\mathbf{x}}_g(t_m) = \frac{1}{T_1} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\mathbf{H}}(\Omega_n) \tilde{\mathbf{q}}(\Omega_n) e^{-i(2\pi m m/N)}.$$

A talaj hatását statikai számításoknál egy rugómátrix segítségével vehetjük figyelembe, amelyet az alátámasztási pontokon működő egységereőkből számított elmozdulásokat tartalmazó hajlékonysági mátrix invertálásával nyerhetünk. Rezgésszámításnál is hasonlóan járhatunk el, de ekkor a gerjesztés hatására a talaj is rezgésbe jön, és az elmozdulásokat befolyásolják a talaj dinamikai jellemzői is. A különböző frekvenciájú harmonikus gerjesztés esetén más-más lesz az elmozdulás. Ez azt jelenti, hogy a hajlékonysági mátrix és a dinamikus rugómátrix is frekvenciafüggő lesz.

A frekvencia térben való vizsgálatnál a komplex merevségekkel felírt egyensúlyi egyenlet adott ω frekvenciájú harmonikus gerjesztés esetén a 4-es ábrán látható.

$\mathbf{K}_{ss}^{\text{din}}$	$\mathbf{K}_{sb}^{\text{din}}$	*	$\tilde{\mathbf{x}}_s$	=	$\mathbf{0}$
$\mathbf{K}_{bs}^{\text{din}}$	$\mathbf{K}_{bb}^{\text{din}} + \tilde{\mathbf{X}}$				

4. ábra. A szerkezet dinamikai egyenlete szerkezet és talaj kölcsönhatásánál

Az egyenlet együtthatómátrixában láthatók a szerkezet $\tilde{\mathbf{K}}^{\text{din}} = \mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M} + i\gamma\mathbf{K}$ dinamikai merevségi mátrixának blokkjai, a talaj $\tilde{\mathbf{X}}$ komplex rugómátrixa (impedancia mátrix).

Az $\tilde{\mathbf{X}}$ impedancia mátrix előállítható a komplex hajlékonysági mátrix inverzeként, amely lehetővé teszi a talajban való hullámterjedéskor keletkező szóródó csillapításnak a modellben való figyelembevételét is. A feladat megoldása nagyméretű építmény végeselemek módszerével való földrengésszámítása esetén rendkívül időigényes, mivel a rendszer szabadságfoka több százezer és a Fourier transzformációban szereplő N értéke is eléri az öt ezret.

Elvégezve a szerkezet elmozdulásainak kvázi-statikuss és dinamikus részre való felosztását, valamint a dinamikus elmozdulásvektort a fix megtámasztású szerkezet sajátvektorainak bázisában $\tilde{\mathbf{x}}_s^{\text{dyn}} = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{z}}$ alakban felírva, bevezetve a $\mathbf{P} = \mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sb}$ kifejezést a feladat az 5-ös ábrán látható egyenletre vezet. Itt az ismeretlenek száma csak a támaszpontok szabadságfokának és a figyelembevett sajátvektorok számának összege.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{K}}_{ss}^{\text{din}} \mathbf{V} & \begin{array}{l} - \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{K}}_{ss}^{\text{din}} \mathbf{P} \\ + \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{K}}_{sb}^{\text{din}} \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} - \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{K}}_{ss}^{\text{din}} \mathbf{V} \\ + \tilde{\mathbf{K}}_{bs}^{\text{din}} \mathbf{V} \end{array} & \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{K}}_{bb}^{\text{din}} + \tilde{\mathbf{X}} \\ + \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{K}}_{ss}^{\text{din}} \mathbf{P} \\ - \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{K}}_{sb}^{\text{din}} \\ - \tilde{\mathbf{K}}_{bs}^{\text{din}} \mathbf{P} \end{array} \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline \tilde{\mathbf{z}} \\ \hline \tilde{\mathbf{x}}_b \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{0} \\ \hline \tilde{\mathbf{f}}_b \\ \hline \end{array}$$

5. ábra. A szerkezet dinamikai egyenlete a sajátvektorokkal való redukálás után

Kidolgoztunk egy olyan eljárást, ahol olyan egyenletrendszer kell - igen sokszor - megoldanunk, amelyek rendszáma mindössze a talajjal érintkező csomópontok szabadságfokától függ.

A numerikus kísérletek során egy 2400 szabadságfokú modellen számítottuk a különböző irányú elmozdulásokhoz tartozó átviteli függvényeket. A szerkezet maximális elmozdulásainak kellő pontosságú számításához már öt sajátvektor alkalmazása elegendő volt, ami a számítási időt a direkt megoldás 5%-ra csökkentette. További eredmények a közleményjegyzék 11, 12, 13-as soraiban látható publikációkban megtekinthetők.

Egy érdekes mérnöki feladat olyan szerkezetek számítása, amelyeknél mind a szélteherből, mind a földrengésből származó igénybevételek mértékadóak lehetnek. Egy hajlékony torony esetén a talajjal való együttműködés hatásának elhanyagolása a földrengésszámításnál a biztonság javára szolgál, míg a szél hatásánál annak kárára van. Ezt a kérdést elemzi a közleményjegyzék 18-as sorában szereplő dolgozat, és erről szól a 2006 májusában a First Euro Mediterranean Symposium of Advances in Geomaterials and Structures címmel Tuniszban szervezett nemzetközi konferencián tartandó előadás is. (Györgyi J: *Effect of soil-structure interaction in case of earthquake and wind calculation of towers*)

A rendszerben lévő csillapítások hatása más egy szokásos 10-30 másodpercig tartó földrengés esetén és más akkor, ha lökészerű 1-2 másodperces rengés van. A továbbiakban – nemzetközi együttműködés keretében - ezt a kérdést kutatjuk. Az eredményekről szóló első beszámolót 2006 augusztusában Japánban tartandó STESSA 2006 nemzetközi konferencián ismertetjük. (J. Györgyi, V. Gioncu & M. Mosoarca: *Behaviour of steel MRFs subjected to near-fault ground motions*)

3. Kötél és sátorszerkezetek dinamikai számítás szélteherre

Ha a számítások során a tömegeket elhanyagoljuk, akkor feladatunk az időben változó terhekre a statikus elmozdulások számítása. A teherváltozásnak megfelelő elmozdulás változása a $\left({}^t\mathbf{K}+{}^t\mathbf{K}_G\right)\mathbf{r}=\mathbf{q}$ összefüggésből számítható, ahol ${}^t\mathbf{K}$ és ${}^t\mathbf{K}_G$ a t időpontbeli helyzethez tartozó merevségi mátrix ill. kiegészítő (geometriai) merevségi mátrix. Az \mathbf{r} vektor ismeretében a rúderök változásának vektora is számítható. A $t+\Delta t$ időponthoz tartozó helyzetnek megfelelően változik a geometriai mátrix is. Ennek segítségével számított tehervektor nem fog megegyezni az adott vektorral. Ugyancsak eltérés lesz kinematikai tehervektorban is, így iterációs eljárásra van szükség. Az egyes iterációs lépésekben a számítható a teher redukált $\mathbf{q}_{\text{red}}^i$ hibavektora és ebből az elmozdulás-növekmény a $\left({}^t\mathbf{K}^i+{}^t\mathbf{K}_G^i\right)\mathbf{r}^i=\mathbf{q}_{\text{red}}^i$ egyenlet megoldásával. Az iterációs eljárást addig kell folytatni, amíg a $\mathbf{q}_{\text{red}}^i$ vektor elegendően kicsi nem lesz. Ezt követően elvégezhető a következő időlépésre vonatkozó számítás.

Ha a számítások során a tömegeket nem hanyagoljuk el, akkor az egyensúlyi egyenletben megjelenik az adott időlépéshez tartozó gyorsulásváltozásnak megfelelő tehetetlenségi erő is:

$$\left({}^t\mathbf{K}+{}^t\mathbf{K}_G\right)\mathbf{r}=\mathbf{q}-\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}.$$

Itt \mathbf{M} a szerkezetnek a számítások során állandónak tekintett tömegmátrixa, míg az $\ddot{\mathbf{r}}$ vektor a gyorsulásváltozás vektora. A mátrix-differenciálegyenlet megoldására több numerikus eljárás áll rendelkezésünkre. A numerikus kísérletek alapján a Newmark-féle eljárás bizonyult a legalkalmasabbnak a számítások elvégzésére.

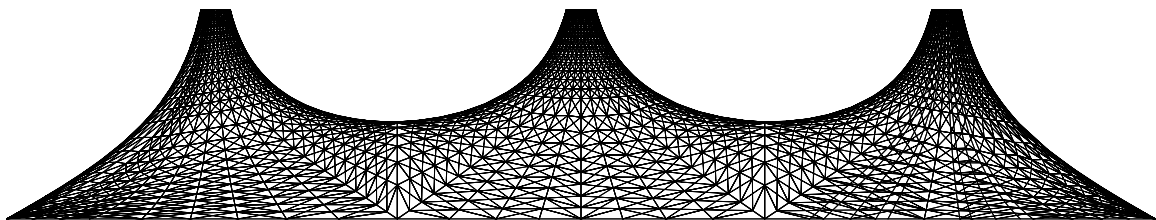
A szélterheléshez a szélesebbesség időfüggvényét a Kaimal által megadott $S_v(z,n)=\frac{200u_*^2 f}{(1+50f)^{5/3}}$ spektrum függvényből az $u(t)=\sqrt{2}\sum_{i=1}^n\sqrt{S_u(n_i)}\Delta n\cos(2\pi n_i t+\phi_i)$ összefüggéssel számítottuk.

Algoritmust dolgoztunk ki a felületen megoszló szélnyomásnak a változó geometriához tartozó tehervektora számítására, figyelembe véve a változás sebességet, így az aerodinamikusan csillapítást, ill. adott esetben az aerodinamikusan gerjesztést. Ebben az esetben az egyes időlépésekben feladatunk a

$$\left({}^t\mathbf{K}+{}^t\mathbf{K}_G\right)\mathbf{r}=\mathbf{q}-\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}-\mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}$$

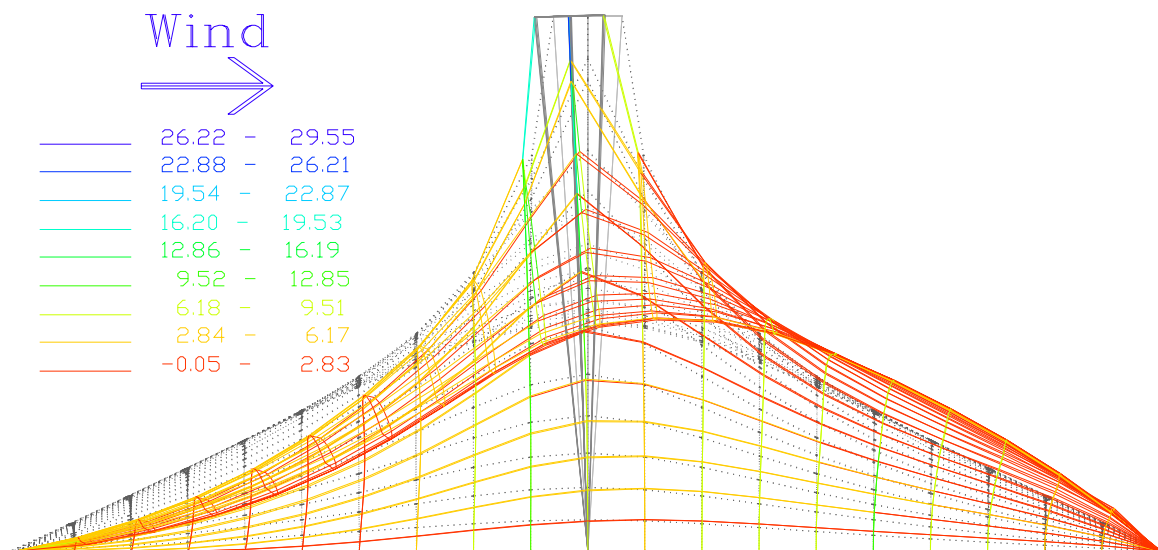
egyenlet megoldása

A terhelés számításánál fontos szerepe van az alak tényezőnek. A tényező meghatározásának klasszikus módszere a szélsatorna kísérlet. A 6-os ábra egy olyan feladatot mutat, amelynél a kísérleti eredmények rendelkezésünkre álltak.



6. ábra. Szélcsatornában vizsgált szerkezet mechanikai modellje,

A 7-es ábrán egy szerkezet elmozdulásainak időbeni alakulását látjuk. A numerikus kísérletek szerint a számítási idő (a számítás időlépéseinek nagysága) a szerkezet előfeszítésének nagyságától erősen függ. További eredmények találhatóak a közleményjegyzék 1, 2, 3, 6 és 16-os soraiban megadott publikációkban



7. ábra. Sátorszerkezet mozgásai szél hatására.

4. Geometriailag és fizikailag nem lineáris dinamikai rendszerek modellezése

A nem lineáris dinamikai feladatok megoldásának módszere a numerikus integrálás. A feladat sikeresen akkor oldható meg, ha elemezzük a szerkezet dinamikai jellemzőit, meghatározzuk a még jelentős kvázi-rezgésalakokhoz tartozó legmagasabb frekvenciát, és az ennek megfelelő periódusidő alapján döntünk az integrálási lépéskörről. A közleményjegyzék 8, 9 és 19-es soraiban megadott publikációk bemutatják ezen munka eredményeit, lehetővé téve nagyjelentőségű atomerőműi szerkezetek korrekt vizsgálatát.